

Mirosław SZREDER

Twierdzenie Bayesa po 250 latach

23 grudnia br. mija 250 lat od dnia, w którym światło dzienne ujrzało twierdzenie sformułowane przez prezbiteriańskiego duchownego Thomasa Bayesa (1701—1761), nazywane potocznie twierdzeniem o prawdopodobieństwie przyczyny. Sam twórca nie żył już wówczas od dwóch lat, a jego wywód przedstawił brytyjskiemu Królewskiemu Towarzystwu Naukowemu inny duchowny i matematyk — Richard Price. Twierdzenie to wywarło ogromny wpływ nie tylko na rozwój teorii prawdopodobieństwa i wnioskowania statystycznego, ale stało się niezwykle użytecznym narzędziem w podejmowaniu decyzji w sytuacjach niepewności.

Gdy w obliczu niepewności, która w życiu prywatnym i zawodowym towarzyszy nam każdego dnia, zadajemy sobie pytanie, w jaki sposób powinna zmienić się nasza opinia lub postępowanie pod wpływem nowej informacji, to racjonalną odpowiedź znajdujemy właśnie w twierdzeniu Bayesa. Większość z nas nie zwykła ignorować nowych przesłanek lub nowych okoliczności mogących zmniejszyć niepewność, a co za tym idzie ryzyko przyszłego działania.

Wyzwaniem dla wielu może być natomiast to, w jaki sposób modyfikować swoją dotychczasową wiedzę, gdy stajemy się posiadaczami nowej informacji. Na przykład, czy odpowiedź na pytanie o prawdopodobieństwo tego, że w losowo wybranej rodzinie z dwojgiem dzieci, dzieci to dziewczynki, ulegnie zmianie, jeżeli otrzymamy informację, iż jedno z nich jest dziewczynką? Czy i jak informacja o tym, że znamy płeć jednego dziecka w tej rodzinie zmieni poszukiwane prawdopodobieństwo? Odpowiedź nie jest trudna¹. W sytuacji gdy informacji tej nie mam, rozważam cztery jednakowo prawdopodobne sytuacje kolejności urodzeń: chłopiec-chłopiec, chłopiec-dziewczynka, dziewczynka-chłopiec, dziewczynka-dziewczynka. Prawdopodobieństwo, że rodzina ma dwie dziewczynki równe jest więc $1/4$. Z kolei gdy dysponuję informacją o płci jednego dziecka, zmniejszającą moją niepewność, to zmniejszeniu ulega też przestrzeń zdarzeń, zredukowana obecnie do trzech sytuacji: chłopiec-dziewczynka, dziewczynka-chłopiec, dziewczynka-dziewczynka. W tych okolicznościach interesujące nas prawdopodobieństwo wynosi $1/3$.

Ten prosty przykład ilustruje na razie jedynie ramy twierdzenia Bayesa, które zawierają się w określeniu „prawdopodobieństwo warunkowe”. Zmiana wartości

¹ Młodinow L. (2011), rozdz. 6.

prawdopodobieństwa z 1/4 na 1/3 spowodowana jest tym, że w drugim przypadku posłużyliśmy się prawdopodobieństwem warunkowym. To właśnie w tym warunku zawarta jest nowa informacja (o płci jednego dziecka). W codziennym życiu najczęściej probabilistyczne myślenie dotyczy właśnie szacowania prawdopodobieństwa warunkowego, czyli prawdopodobieństwa pewnego zdarzenia pod warunkiem posiadania określonej wiedzy związanej z tym zdarzeniem lub jego okolicznościami.

Psycholog, noblista w dziedzinie ekonomii, Daniel Kahneman znaczenie wiedzy wstępnej (*a priori*) w procesie oceny przez nas niepewności ilustruje następującym przykładem²: pewna osoba została przez sąsiada opisana jako mężczyzna bardzo nieśmiały i wycofany, zawsze chętny do pomocy, mało mówny, mający potrzebę porządku, dbający o szczegóły. Co jest bardziej prawdopodobne — czy to, że mężczyzna ten jest bibliotekarzem, czy to, że jest rolnikiem? Osobowość opisanego mężczyzny pasuje do osobowości stereotypowego bibliotekarza, dlatego wiele osób uważa, że jest on bibliotekarzem. Tymczasem, jeżeli wziąć pod uwagę, że w Stanach Zjednoczonych na każdego bibliotekarza przypada ponad dwudziestu rolników, to prawdopodobieństwo, że osoba ta jest bibliotekarzem jest znacznie mniejsze niż prawdopodobieństwo, że jest ona rolnikiem. W odpowiedzi tych, którzy twierdzą inaczej, widoczna jest nieumiejętność połączenia dwóch źródeł informacji — informacji wstępnej (*a priori*) o strukturze zawodowej całej zbiorowości mężczyzn oraz informacji wynikających z opisu osobowości danego mężczyzny.

Dość często, jak stwierdza D. Kahneman, kiedy dysponujemy informacjami o konkretnym przypadku, statystyczne informacje wstępne są niedoszacowane, a nawet całkowicie lekceważone. Samą istotą twierdzenia Bayesa jest wskazanie, jak błędu tego uniknąć, czyli w jaki sposób racjonalnie łączyć ze sobą dwa źródła informacji — wstępnej (*a priori*) oraz z konkretnego doświadczenia (obserwacji, próby). Każda kolejna obserwacja, kolejne doświadczenie wzbogaca dotychczasową wiedzę wstępną i następnego dnia znów stajemy przed wyzwaniem zweryfikowania tej wiedzy na podstawie nowej informacji.

Twierdzenie Bayesa nazywane jest twierdzeniem o prawdopodobieństwie przyczyny, gdyż odnosi się do sytuacji, w której pewne zdarzenie już nastąpiło, a ocenić trzeba prawdopodobieństwo tego, że inne dane zdarzenie było jego przyczyną. Ważne jest tu, co jest przyczyną, a co skutkiem. Prawdopodobieństwo zdarzenia A pod warunkiem B jest na ogół inne aniżeli prawdopodobieństwo zdarzenia B pod warunkiem A. Utożsamianie ze sobą tych dwu prawdopodobieństw jest — zdaniem L. Młodinowa — dość powszechnym błędem. Autor ilustruje ten błąd ciekawym przykładem³. Przypuśćmy, że szefowa dłużej niż zwykle odpowiada na twoje e-maile. Wiele osób uznałoby, iż jest to oznaka, że ich gwiazda gaśnie, jeżeli bowiem czyjaś gwiazda rzeczywiście gaśnie, to są spore szanse, że szefowa z lekceważącym opóźnieniem reagować będzie na jego

² Kahneman D. (2012), s. 14.

³ Młodinow L. (2011), rozdz. 6.

maile. Ale być może twoja szefowa odpisuje wolniej, bo jest ostatnio szczególnie czymś zajęta albo ma jakieś osobiste problemy. Prawdopodobieństwo, że twoja gwiazda gaśnie, jeśli szefowa dłużej niż zwykle odpowiada na maile, jest znacznie mniejsze niż szansa, że szefowa zwlekać będzie z odpowiedziami na maile, jeśli twoja gwiazda zacznie gasnąć. I w konkluzji Autor dodaje: *Uznanie, jakim cieszą się liczne teorie spiskowe, opiera się na niezrozumieniu tej różnicy, to znaczy na myleniu prawdopodobieństwa, że seria jakichś wydarzeń miałaby miejsce, gdyby krył się za nią potężny spisek, z prawdopodobieństwem, iż potężny spisek rzeczywiście istnieje, jeżeli wiadomo, że zaszła pewna seria wydarzeń*⁴.

Ogłoszone 250 lat temu twierdzenie Thomasa Bayesa stało się podstawą nowego podejścia do wielu zagadnień z zakresu statystyki i teorii podejmowania decyzji. Było i jest dla każdego z nas propozycją racjonalnego przetwarzania informacji w obliczu nowych faktów i nowych obserwacji czynionych każdego dnia. Pozwala uniknąć typowych błędów poznawczych w przetwarzaniu informacji na temat zdarzeń i sytuacji o charakterze losowym.

Thomas Bayes był także prekursorem nowej, różnej od klasycznej i częstościowej, interpretacji prawdopodobieństwa. Prawdopodobieństwo miało wyrażać stopień przekonania danej osoby o prawdziwości danego zdarzenia, a więc miało wynikać z całości posiadanej przez tę osobę wiedzy i doświadczenia. Również J. Bernoulli w pracy pt. *Ars Conjectandi* z 1713 r. pisał o prawdopodobieństwie jako o stopniu zaufania do realizacji danego zdarzenia na podstawie posiadanej wiedzy o ogólnych okolicznościach tego zdarzenia. Stąd interpretację tę później nazwano personalistyczną lub subiektywną. W przeciwieństwie do interpretacji częstościowej prawdopodobieństwo subiektywne jest traktowane personalistycznie i warunkowo ze względu na przeszłość i na całe otoczenie analizowanego zdarzenia. Jedynym ograniczeniem jest, aby zbiór prawdopodobieństw był dla danej osoby spójny i nie łamał postulatu logicznej zgodności. *Zgodne lub spójne oszacowania są dotąd dopuszczalne, dopóki dana osoba czuje, że odpowiadają one jej przekonaniom*⁵.

Po 250 latach od dnia ogłoszenia twierdzenia Bayesa jego znaczenie zdaje się rosnąć a nie maleć. Po pierwsze dlatego, że coraz ważniejsza i bardziej pożądana staje się umiejętność poruszania się w świecie zjawisk o naturze stochastycznej. Rośnie więc ranga racjonalnego przetwarzania informacji, gotowości uczenia się na doświadczeniach, a co za tym idzie umiejętności zmiany przekonań na podstawie nowych dostępnych informacji. Po drugie, duża dynamika współczesnego świata powoduje, że w ocenie prawdopodobieństwa zdarzeń w życiu ekonomicznym i społecznym trudniejsze niż kiedyś staje się spełnienie założeń stosowania interpretacji klasycznej i częstościowej⁶. Chętniej sięgamy do interpretacji personalistycznej, także w obliczu łatwiejszego niż w przeszłości dostępu do różnych źródeł informacji. Szczególnie ważne jest w tych okolicznościach

⁴ Młodinow L. (2011), s. 128.

⁵ Winkler R. (1967), s. 1105 (tłumaczenie własne).

⁶ Szerzej na ten temat w opracowaniach M. Szredera (2002), s. 7—17 i (2004), s. 1—10.

adekwatne łączenie i ważenie tych informacji we wnioskowaniu lub podejmowaniu decyzji. Bayesowskie podejście do tego problemu, w ciągu 250 lat wzbogacone wynikami badań matematyków, statystyków i psychologów, jest wciąż warte refleksji i dalszych studiów.

prof. dr hab. Mirosław Szreder — Uniwersytet Gdański

LITERATURA

- Kahneman D. (2012), *Pułapki myślenia. O myśleniu szybkim i wolnym* (tłumaczenie P. Szyczak), wyd. Media Rodzina, Poznań
- Młodinow L. (2011), *Matematyka niepewności. Jak przypadki wpływają na nasz los* (tłumaczenie P. Strzelecki), wyd. Prószyński i S-ka, Warszawa
- Szreder M. (2002), *Prior Probabilities — the Pleasure of Bayesian Inference*, „Przegląd Statystyczny”, nr 4, t. 49
- Szreder M. (2004), *Od klasycznej do częstościowej i personalistycznej interpretacji prawdopodobieństwa*, „Wiadomości Statystyczne”, nr 8
- Winkler R. (1967), *The quantification of judgment: Some methodological suggestions*, „Journal of the American Statistical Association”, vol. 62

SUMMARY

The Author recalls that 250 years ago in the British scientific circles appeared theorem of probability of causes, now called Bayes' theorem (formulated in 1763 by Thomas Bayes). It refers to the situation where there has been some events and once need to assess the probability of another incident which was the reason, i.e. what is cause and what is the effect of this event. Despite the passing years Bayes' approach in statistical surveys for the conditional probability of occurrence is constantly confirmed and important.

РЕЗЮМЕ

Автор восстанавливает в памяти историю появления 250 лет назад в британском научном кругу теоремы вероятности причины, называемой теперь байесовской. Сформулировал ее Томас Байес в 1763 г. Эта теорема относится к ситуации когда произошло какое-то событие и необходимо оценить вероятность другого события, которое было причиной первого, и надо оценить что является причиной, а что следствием.

Несмотря на истечение времени байесовский подход к выступлению условной вероятности в статистических обследованиях постоянно проверяется и его значения по прежнему не уменьшается.